統計推測特論（稲葉） No.D3

2021.11.02(火２)

ZOOM

D. 収束定理

Def.D1. $\{X_n\}$ ：１次元 r.v.(確率変数：random variable) の列と、$a \in \boldsymbol{R}^1$ に対して、

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

が成立するとき、X_n は a に 確率収束 するといい、記号で

$$X_n \overset{p}{\to} a \quad (n \to \infty)$$

と書く。

$X_n \overset{p}{\to} 0 \ (n \to \infty)$ のとき、 $X_n = op(1)$ とも書く (Mann-Wald の記号)。

数列 $\{r_n\}$ に対して、$\dfrac{X_n}{r_n} = op(1)$ のとき、$X_n = op(r_n)$ と書く。

補足：$x_n \to 0 \ (n \to \infty)$ のことを、$x_n = o(1)$ と書く。

Lem.D1(Marcov の不等式)

$$X \geq 0 \ (w.p.1), \ K > 0$$

$\Longrightarrow$

$$P\{X \geq K\} \leq \frac{E(X)}{K}$$

$$\because \quad E(X) = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^{K-0} x dF + \int_k^\infty x dF$$

$$\geq 0 + K\int_k^\infty dF = KP\{X \geq K\}$$

Lem.D2(Chebyshev の不等式)

$$\mu = E(X), \ \sigma^2 = var(X), \ k > 0$$

$\Longrightarrow$

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\because \quad 左辺 = P\{(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2\} \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

Lem.D3 $\quad X_1, \cdots, X_n : i.i.d. \quad \mu = E(X_1), \ \sigma^2 = var(X_1)$

$$\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

$\Longrightarrow$

$$E(\overline{X}) = \mu, \ var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2021.11.02(火２)

ZOOM

Prop.D1（大数の弱法則）

$$\left.\begin{array}{l} X_1,\cdots,X_n: i.i.d. \\ \mu = E(X_1) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \overset{p}{\to} \mu \ (n \to \infty)$$

$\because$　$\sigma^2 = var(X_1) < \infty$ を仮定して証明する。

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| > \varepsilon\} = 0 \tag{$*$}$$

を言えばよい。

$(*)$ における $P = P\left\{|\overline{X} - \mu| \geq \dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \leq \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)^2}$

Def.D2　$F, F_n(n = 1, 2, \cdots)$ ：1 次元 c.d.f.（累積分布関数）

C_F : F の連続点全体　　とする。

（補足：分布関数とは、$F(a) = P\{X \leq a\}$ のこと。単調非減少。）

$$\forall a \in C_F, \ \lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$$

が成立するとき、F_n は F に収束するといい、$F_n \to F$ で表わす。

$$X, \ X_n(n = 1, 2, \cdots): \ 1 \text{ 次元 r.v.}$$

において、X_n の c.d.f. が X の c.d.f. F に収束するとき、X_n は X に分布収束（法則収束）するといい、　$X_n \overset{d}{\to} X$　または　$X_n \overset{d}{\to} F$ と書く。

[注意]　条件 $a \in C_F$ の必要性

$X_n = x_n, \ X_0 = x_0, \ x_n \downarrow x_0$　のとき　$X_n \overset{d}{\to} X_0$　としたい。

Def.D3　X_n : r.v.

$\mu_n \in \boldsymbol{R}^1, \ \sigma_n > 0, \ (n = 1, 2, \cdots)$　に対して、

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \overset{d}{\to} N(0, 1)$$

が成立するとき、X_n は漸近的に $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ に従うといい、

$$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2) \qquad (n \to \infty)$$

で表わす。

[注意] １．　$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

２．　$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2) \quad (n \to \infty)$　であっても、

$E(X_n) = \mu_n, \ var(X_n) = \sigma_n^2$　は必ずしも成立しない。

反例：$Z \sim N(0, 1)$

$$X_n = \begin{cases} Z & w.p. 1 - \frac{1}{n} \\ n^2 & w.p. \frac{1}{n} \end{cases}$$

とすると、$E(X_n) = (1 - \frac{1}{n})E(Z) + \frac{1}{n}n^2 = n, \quad X_n \sim N(0, 1)$