補助資料 Z. 問題 A13 の証明について

この資料は、シュミットの直交化の正確な定義を用いて、問題 A12 の証明と共に問題 A13 の完全な証明をイメージすることを目的とする。

Z.1. シュミットの直交化

m 本のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に関する、シュミットの直交化の手順を以下に示す。

step1) $i = 1$ とする。$j = 1$ とする。
（意味：i は、扱っているベクトルの番号で、j は、一次独立なベクトルの番号。）

step2) 次の式を計算する。
（意味：直交化している。内積がゼロになるようにしている。）

$$\boldsymbol{b}_j := \boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{j-1} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}_k)\boldsymbol{c}_k \qquad (j = 1 \text{ の時は、} \boldsymbol{b}_j := \boldsymbol{a}_i \text{ とせよ。})$$

step3) $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$ かどうか？
（意味：$\{\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{j-1}, \boldsymbol{a}_i\}$ が一次従属かどうか？）

step3-1) $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$ ならば、$i = i + 1$ として、step2) に戻る。
step3-2) $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ ならば、step4) へ進む。

step4) $\boldsymbol{c}_j = \dfrac{\boldsymbol{b}_j}{|\boldsymbol{b}_j|}$, $j = j + 1$ とおき、step5) へ進む。
（意味：長さを 1 にしている。）

step5) $i = m$ かどうか？
step5-1) $i = m$ ならば、シュミットの直交化は終了する。
step5-2) $i < m$ ならば、$i = i + 1$ として、step2) に戻る。

Z.2. 参考：問題 A12'

$$A, B \in O(n) \quad \Longrightarrow \quad \exists P \in O(n), B = PA$$

【略証】：$A, B \in O(n)$ より、$AA' = A'A = I_n$, $BB' = B'B = I_n$ である。ここで、$P = BA'$ とおくと、$PP' = (BA')(BA')' = BA'AB' = BB' = I_n$ ゆえ、$P \in O(n)$. 【略証終】

Z.3. 参考：問題 A12

$$A, B \in O(n \times m) \quad \Longrightarrow \quad \exists P \in O(n), B = PA$$

【略証】：まず、$A, B \in O(n \times m)$ より、列直交の定義から、以下の性質が成り立つ。

$$A'A = B'B = I_m$$

すなわち、A, B の列ベクトルを、それぞれ $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$, $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ とおくと、$A'A$ の (i, j) 要素は、クロネッカーのデルタ δ_{ij} であるから、$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, 全く同様に、$B'B$ の (i, j) 要素に関して、$\boldsymbol{b}_i'\boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}$ が成り立つ。

ここで、n 次元ベクトルの単位ベクトルを、$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とおき、$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ に加えた後、シュミットの直交化を行えば、最初の m 本は元の A の列ベクトルである行列 A^* ができ、これは直交行列となる。全く同様に、B の列ベクトルに $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を加えてシュミットの直交化を行って B^* を作る。

最後に、**問題 A12'** より、$B^* = PA^*$ となる P があり、この P は、$B = PA$ を満たす。

【略証終】

Z.4. 参考：問題 A13

$$\left.\begin{array}{l} A, B : n \times m \\ A'A = B'B \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists P \in O(n), B = PA$$

【略証】仮定より、$A'A = B'B$ ゆえ、$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}_i'\boldsymbol{b}_j$ $(\forall i,\ \forall j)$. ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ (Z.1)

A にシュミットの直交化を行い、極大一次独立な $A^* = (\boldsymbol{a}_{p_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{p_t})$ を得るとする。

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{a}_{p_i} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\boldsymbol{a}_{p_i}, \boldsymbol{d}_k)}{(\boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{d}_k)} \boldsymbol{d}_k, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{d}_i}{|\boldsymbol{d}_i|} \ (1 \leqq \forall i \leqq t),$$

$$\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \ (\forall i,\ \forall j) \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.2)}$$

このとき、ある係数 λ_{ik} $(1 \leqq k \leqq i \leqq t)$ があって、次が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} \boldsymbol{a}_{p_k}, \quad \lambda_{ii} \neq 0. \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.3)}$$

この係数 λ_{ik} を用いて、$\boldsymbol{f}_i := \sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} \boldsymbol{b}_{p_k}$ とおくと、(Z.1),(Z.2) より、$\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ ゆえ、$F'F = E'E = I_t$. したがって、問題 A12 の仮定を満たすので、$\exists P \in O(n)\ s.t.\ F = PE$.

よって、$\boldsymbol{f}_i = P\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq \forall i \leqq t)$. ゆえに、$\sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} \boldsymbol{b}_{p_k} = P\left(\sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} \boldsymbol{a}_{p_k}\right)$ $(1 \leqq \forall i \leqq t)$.

$$\therefore \ \sum_{k=1}^{i} \lambda_{ik} (\boldsymbol{b}_{p_k} - P\boldsymbol{a}_{p_k}) = \boldsymbol{0} \ (1 \leqq \forall i \leqq t). \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.4)}$$

ここで、(Z.4) で、$i = 1$ の場合に $\lambda_{11} \neq 0$ より、$\boldsymbol{b}_{p_1} - P\boldsymbol{a}_{p_1} = \boldsymbol{0}$. これと (Z.4) で $i = 2$ の場合に $\lambda_{22} \neq 0$ より、$\boldsymbol{b}_{p_2} - P\boldsymbol{a}_{p_2} = \boldsymbol{0}$. よって、帰納的に、以下が得られる。

$$\boldsymbol{b}_{p_k} - P\boldsymbol{a}_{p_k} = \boldsymbol{0} \ (1 \leqq \forall k \leqq t). \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.5)}$$

一方、$\{\boldsymbol{a}_{p_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{p_t}\}$ の極大一次独立性より、次が成り立つ。

$$1 \leqq \forall q \leqq m,\ \exists (c_1, \cdots, c_t) \quad s.t. \quad \boldsymbol{a}_q = \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{a}_{p_k}. \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.6)}$$

(Z.1) より、$\left(\boldsymbol{b}_q - \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{b}_{p_k}\right)'\left(\boldsymbol{b}_q - \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{b}_{p_k}\right) = \left(\boldsymbol{a}_q - \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{a}_{p_k}\right)'\left(\boldsymbol{a}_q - \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{a}_{p_k}\right) = 0$ ゆえ、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{b}_q = \sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{b}_{p_k} \ (1 \leqq \forall q \leqq m). \quad \cdots\cdots \quad \text{(Z.7)}$$

よって、(Z.5) $\sim$ (Z.7) より、$\forall q$ に対して、$\boldsymbol{b}_q = \sum_{k=1}^{t} c_k (P\boldsymbol{a}_{p_k}) = P\sum_{k=1}^{t} c_k \boldsymbol{a}_{p_k} = P\boldsymbol{a}_q$.

したがって、$P \in O(n)$ で $B = PA$ が成り立つ。【略証終】

2021.08.02(月４)

ZOOM

Def.C3. $Z_1, \cdots, Z_p$ i.i.d. $N(0,1)$
ならば、$\boldsymbol{Z} = (Z_1, \cdots, Z_p)'$ は p 次元標準正規分布に従うという。
$\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$ と表す。

Prop.C7. $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p) \quad \Longrightarrow \quad E(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{0}, var(\boldsymbol{Z}) = I_p$

Prop.C8. $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{Z}_1 \sim N_q(\boldsymbol{0}, I_q)$$

Prop.C9. $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$
$\Longleftrightarrow \quad Z$ は、p.d.f. $(2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}) =: \phi(\boldsymbol{z})$ を持つ。$(\boldsymbol{z} \in R^p)$

$\because$ $\Pi_{i=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2} = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$

Prop.C10. $\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p) \\ P \in O(p) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad P'\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$

$\because$ $\boldsymbol{Y} := P'\boldsymbol{Z}$ の p.d.f. は
$f(\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}))|J|, \qquad J = det(\dfrac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}})$：ヤコビアン

$\boldsymbol{y} = P'\boldsymbol{z}$ より $\boldsymbol{z} = P\boldsymbol{y}$

$\therefore \quad \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}. \quad J = det(P) = \pm 1$

$\therefore \quad f(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{y})$

$\therefore \quad \boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$

系. $\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p) \\ P \in O(p \times q) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad P'\boldsymbol{Z} \sim N_q(\boldsymbol{0}, I_q)$

$\because$ $\exists P_0 = \boxed{P \;\middle|\; P^*} \in O(p)$

$\boldsymbol{W}_0 := P_0'\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$

$\boldsymbol{W}_0$ の最初の q 成分が $P'\boldsymbol{Z}$ であるから、Prop.C8. より $P'Z \sim N_q(\boldsymbol{0}, I_q)$

2021.08.02(月４)
ZOOM

Def.C4. $\boldsymbol{\mu} : p \times 1,\ \Sigma : p \times p$, 非負, $\mathrm{rank}\Sigma = r$ とする。
$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)'$ が p 次元正規分布 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うとは

$$\exists \boldsymbol{Z} \sim N_r(\boldsymbol{0}, I_r), \quad \exists A : p \times r \quad \text{定数行列}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}, \qquad \Sigma = AA'$$

[注意] この Def. は Def.C3. の拡張になっている。
即ち、Def.C4. において、$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$ ならば

$$\exists \boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p), \quad \exists A : p \times p \quad \text{定数行列}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{Z}, \qquad I_p = AA'$$

第２式より、$A \in O(p)$.
第１式と Prop.C10. より、$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$ となり、Def.C3. と矛盾していない。

Prop.C11. $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu} \\ var(\boldsymbol{X}) = \Sigma \end{cases}$

$\because$ $E(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\mu} + AE(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\mu}$
$var(\boldsymbol{X}) = Avar(\boldsymbol{Z})A' = AA' = \Sigma$

Prop.C12. $\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z} \sim N_r(\boldsymbol{0}, I_r) \\ A : p \times r,\ \Sigma = AA' \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$\because$ $s := \mathrm{rank}\Sigma = \mathrm{rank}A$
A の特異分解を $A = P\rho Q'$ とする。
$\boldsymbol{W} := Q'\boldsymbol{Z} \sim N_s(\boldsymbol{0}, I_s) \quad (\because \quad Prop.C.10.\text{系})$
$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu} + P\rho Q'\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu} + P\rho\boldsymbol{W}$
$(P\rho)(P\rho)' = AA' = \Sigma$

ならば、Def.C4. より

$$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

[注意] この Prop. が Def.C4. と違うのは

$$\mathrm{rank}\Sigma = r$$

を要求していないことである。