2021.11.24(水 13:10 〜)
兵庫高校

## 14　一元配置分散分析

（この章のポイント）
1）3 つ以上の群のデータについての違いは、平方和で分析できる。
2）平方和の比で分析するので、F 分布で検定する。
3）最適水準における母平均の区間推定は t 分布が利用できる。

### 14.1　3 つ以上の群のデータ

11 章で 1 群、12 章では 2 群のデータの比較の方法について紹介しました。しかし、臨床試験では実際の投薬用量を決めるためにも、3 つ以上の用量での実験が行われてます。以下の例題を見てみましょう。

**例題 14.1**　臨床試験で、対照群、低用量群、高用量群の 3 群比較を行う。各群 $n = 5$ 人についての測定データを、表 14.1 に示す。

表 14.1　3 群のデータ

| 群 | データ $x_{ij}$ | | | | | 和 $T_i$ | データ数 $n_i$ | 平均 $\overline{x}_i$ | 二乗和 | 平方和 $S_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 対照群 $A_1$ | 20 | 25 | 17 | 18 | 15 | 95 | 5 | 19 | 1863 | 58 |
| 低用量群 $A_2$ | 18 | 17 | 12 | 14 | 19 | 80 | 5 | 16 | 1314 | 34 |
| 高用量群 $A_3$ | 23 | 26 | 21 | 19 | 21 | 110 | 5 | 22 | 2448 | 28 |
| 計 | −−−−−− | | | | | 285 | 15 | −− | 5625 | 120 |

$a$ 個の群から、各々 $n_i$ 個のデータを取り、下記の仮定を設定します。

仮定：$x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2),\ i = 1, \cdots, a;\ j = 1, \cdots, n_i$

ここで、各群のデータの母分散が同じ（等分散）であるとの仮定をおいています。もちろん、3 つ以上の母分散が異なるかどうかの検定を行う手法もあります。

### 14.2　平方和の分解

各群のデータ数 $n_i \equiv n$ は一定とします。各群での母平均 $\mu_i$ について、これらが等しいかどうかを調べます。

帰無仮説：$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$
対立仮説：その他

まずデータのばらつきを、各群での標本平均 $\overline{x}_i$ を介して、2 つの変動に分解します。

$$\underline{\text{データの分解}}：x_{ij} - \overline{\overline{x}} = (x_{ij} - \overline{x}_i) + (\overline{x}_i - \overline{\overline{x}}) \tag{14.1}$$

一つ目は、母平均の違いを、各群での標本平均の変動 $\overline{x}_i - \overline{\overline{x}}$ で捉えます。これは群間変動です。二つ目は、群の中での変動 $x_{ij} - \overline{x}_i$ で、誤差的なばらつきを意味します。これは群内変動です。これらの二乗和を、それぞれ、要因平方和（群間平方和）$S_A$, 誤差平方和（群内平方和）$S_E$ といいます。

$$\text{要因平方和}：S_A = n\sum_{i=1}^{a}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 \tag{14.2}$$

$$\text{誤差平方和}：S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \tag{14.3}$$

このことを、表 14.1 の 15 個のデータで表現すると、以下のようになります。

表 14.2　データの分解

(a) データ：$x_{ij}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 20 | 25 | 17 | 18 | 15 |
| $A_2$ | 18 | 17 | 12 | 14 | 19 |
| $A_3$ | 23 | 26 | 21 | 19 | 21 |

$-$

(b) 総平均：$\overline{\overline{x}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| $A_2$ | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| $A_3$ | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |

$=$

(c) 群間変動：$\overline{x}_i - \overline{\overline{x}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_2$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ |
| $A_3$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

$+$

(d) 群内変動：$x_{ij} - \overline{x}_i$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 6 | $-2$ | $-1$ | $-4$ |
| $A_2$ | 2 | 1 | $-4$ | $-2$ | 3 |
| $A_3$ | 1 | 4 | $-1$ | $-3$ | $-1$ |

(c) より、$S_A = n\sum_{i=1}^{a}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 = 5\{0^2 + (-3)^2 + 3^2\} = 90$

(d) より、$S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2 = 1^2 + 6^2 + \cdots + (-1)^2 = 120$

がわかります。一般的に、データの総平方和 $S_T$ を、

$$\underline{\text{総平方和}}：S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{\overline{x}})^2 \tag{14.4}$$

とおくと、これら 3 つの平方和には、

$$S_T = S_A + S_E \tag{14.5}$$

の関係が成り立ちます。これを <u>平方和の分解</u> といいます。

これが成り立つ理由は、

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})(x_{ij} - \overline{x}_i) = \sum_{i=1}^{a}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)\right\} = 0 \tag{14.6}$$

の { } 内が **「群内の偏差の和がゼロ」** であることから導かれます。なお、表 14.2 の (d) で、各群内の 5 つずつの和がゼロより確かめられます。

## 14.3　分散分析表による検定

群による母平均の違いについては、自由度を考慮して、F 検定を行います。各要因の自由度は、<u>総自由度</u> $\phi_T = an - 1$, <u>要因自由度</u> $\phi_A = a - 1$, <u>誤差自由度</u> $\phi_E = a(n-1)$ です。各要因ごとに、自由度 1 当りの平方和（平均平方）$V$ を求めて、最終的に、**検定統計量**は $F_0 = V_A/V_E$ で求めます。

なお、棄却域は

**棄却域** $R : F_0 \geqq F(\phi_A, \phi_E; 0.05)$

のように、必ず右片側検定となります。これは、対立仮説の下では、$F_0$ が大きくなる傾向があるからです。ここまでの計算結果を、表にまとめます。

表 14.3　分散分析表

| 要因 | 平方和 | 自由度 | 平均平方 | $F_0$ 値 | 限界値 |
|---|---|---|---|---|---|
| 因子 $A$ | $S_A$ | $\phi_A = a - 1$ | $V_A = S_A/\phi_A$ | $F_0 = V_A/V_E$ | $F(0.05)$ |
| 誤差 $E$ | $S_E$ | $\phi_E = a(n-1)$ | $V_E = S_E/\phi_E$ | $--$ | $--$ |
| 計　$T$ | $S_T$ | $\phi_T = an - 1$ | $--$ | $--$ | $--$ |

帰無仮説の下で、この検定統計量 $F_0$ が $F(\phi_A, \phi_E)$ 分布に従う理由は、章末問題 14.1 を参照して下さい。

**例題 14.2**　表 14.1 のデータについて、一元配置分散分析を行え。

表 14.4　分散分析表

| 要因 | 平方和 | 自由度 | 平均平方 | $F_0$ 値 | 限界値 |
|---|---|---|---|---|---|
| 因子 $A$ | 90 | 2 | 45.0 | 4.50 | 3.89 |
| 誤差 $E$ | 120 | 12 | 10.0 | −− | −− |
| 計　$T$ | 210 | 14 | −− | −− | −− |

**結論**：$F_0 = 4.50 \geqq 3.89 = F(2, 12; 0.05)$ より、有意水準 5% で、要因 $A$ によって母平均には違いがあるといえる。

## 14.4　投与群での母平均の推定

母平均 $\mu_i$ の **点推定値** は $\overline{x}_i$ です。この点推定量の分布は、$n$ 個の平均ですから、

$$\overline{x}_i \sim N\left(\mu_i, \sigma^2/n\right) \tag{14.7}$$

となります。ここで、$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(\phi_E)$ であることを利用すると、(14.7) 式を標準化して、分母の $\sigma^2$ に $V_E$ を代入することで、自由度が $\phi_E$ の t 分布が導かれます。そこで、$\mu_i$ の 95% 信頼限界は、次のようになります。

信頼上限：$\overline{x}_i + t(\phi_E, 0.025)\sqrt{V_E/n}$
信頼下限：$\overline{x}_i - t(\phi_E, 0.025)\sqrt{V_E/n}$

**例題 14.3**　表 14.1 のデータについて、高用量群の母平均の推定を行え。
**解答**：点推定値は、$\widehat{\mu}_3 = \overline{x}_3 = 22.0$, 95% 信頼限界は、$\overline{x}_3 \pm t(12, 0.025)\sqrt{10.0/5} = 22.0 \pm 2.179\sqrt{2} = 22.0 \pm 3.1 = 18.9,\ 25.1$ となる。

このように実験を始めても、途中でデータが脱落することがあります。例えば病院の患者であれば、より重症の疾患が見つかり、そちらの治療を優先して病院に来なくなることがあり得ます。そのような場合、各群のデータ数が異なることになります。データ数が揃っている場合を バランスケース、揃っていない場合を アンバランスケース といいます。アンバランスケースは、次節で議論します。

## 14.5　サンプルサイズが異なる場合の分析 *

各群での平均と、総平均は、次の式で推定します。

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}/n_i, \quad \overline{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}/N, \quad \left(\text{ただし、}N = \sum_{i=1}^{a} n_i\right)$$

### 14.5.1　アンバランスケースの平方和の分解

$$\text{要因平方和：}S_A = \sum_{i=1}^{a} n_i(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 \tag{14.8}$$

$$\text{誤差平方和：}S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \tag{14.9}$$

$$総平方和：S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{\overline{x}})^2 \tag{14.10}$$

**例題 14.4**　臨床試験で、対照群、低用量群、中用量群、高用量群の 3 群比較を行う。$n_1 = 4,\ n_2 = 5,\ n_3 = 3,\ n_4 = 4$ で、総人数 $N = 16$ 人についての測定データを表 14.5 に示す。

表 14.5　4 群のデータ

| 群 | デ　ー　タ $x_{ij}$ | | | | | 和 $T_i$ | データ数 $n_i$ | 平均 $\overline{x}_i$ | 二乗和 | 平方和 $S_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 対照群　$A_1$ | 18 | 23 | 18 | 17 | | 76 | 4 | 19 | 1466 | 22 |
| 低用量群 $A_2$ | 16 | 19 | 20 | 12 | 13 | 80 | 5 | 16 | 1330 | 50 |
| 中用量群 $A_3$ | 19 | 18 | 23 | | | 60 | 3 | 20 | 1214 | 14 |
| 高用量群 $A_4$ | 24 | 23 | 20 | 21 | | 88 | 4 | 22 | 1946 | 10 |
| 計 | −−−−− | | | | | 304 | 16 | −− | 5956 | 96 |

### 14.5.2　アンバランスケースでの検定

自由度は、$\phi_A = a - 1,\ \phi_E = \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1) = N - a$ となります。以下、平均平方や $F_0$ 値、棄却限界値を求めて要因に意味があるかどうかの検定ができます。これらを分散分析表にまとめます。

表 14.7　分散分析表

| 要因 | 平方和 | 自由度 | 平均平方 | $F_0$ 値 | 限界値 |
|---|---|---|---|---|---|
| 因子 $A$ | 84 | 3 | 28.0 | 3.50 | 3.49 |
| 誤差 $E$ | 96 | 12 | 8.0 | −− | −− |
| 計　$T$ | 180 | 15 | −− | −− | −− |

結論：$F_0 = 3.50 \geqq 3.49 = F(3, 12; 0.05)$ より、有意水準 5% で、要因 $A$ によって母平均には違いがあるといえる。

### 14.5.3　アンバランスケースでの母平均の推定

母平均 $\mu_i$ の **点推定値** は $\overline{x}_i$ です。この点推定量の分布は、$n_i$ 個の平均ですから、

$$\overline{x}_i \sim N\left(\mu_i, \sigma^2/n_i\right) \tag{14.11}$$

となります。ここで、$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(\phi_E)$ であることを利用すると、(14.11) 式を標準化して、分母の $\sigma^2$ に $V_E$ を代入することで、自由度が $\phi_E$ の t 分布が導かれます。そこで、$\mu_i$ の 95% 信頼限界は、次のようになります。

$$信頼上限、下限：\overline{x}_i \pm t(\phi_E, 0.025)\sqrt{V_E/n_i}$$

**例題 14.6**　表 14.5 のデータについて、中用量群の母平均の推定を行え。
**解答**：点推定値は、$\widehat{\mu}_3 = \overline{x}_3 = 20.0,\ 95\%$ 信頼限界は、$\overline{x}_3 \pm t(12, 0.025)\sqrt{8.00/3} = 20.0 \pm 2.179\sqrt{8/3} = 20.0 \pm 3.6 = 16.4,\ 23.6$ となる。

## 14.6　まとめ

3 つ以上の母平均の違いは、母平均の推定値の変動を平方和で捉えます。誤差平方和は、各群ごとに計算して併合するだけで大丈夫です。（併合するときに、カイ二乗分布の再生性を利用します。）

このように計算すると、母平均の推定値や、要因平方和、誤差平方和は、互いに独立になりますので、t 分布や F 分布で検定や推定が可能です。また、サンプルサイズが異なるときも同様に計算できます。ちなみに、自由度は、いくつの平均についての平方和かで、その個数から 1 を引けば求められます。