創造応用 IS（稲葉）　　No.e9b

2021.11.24(水 13:10 ～)

兵庫高校

（演習問題 9b）「二元配置分散分析（繰り返しなし）」

ある特性値に対して、２つの母数因子 A（２水準)、B（３水準）を取り上げ、計６回の実験をランダムな順序で行ない、濃度を測定した。得られた結果を表１に示す。なお、データの単位は省略してあるが、値は大きい方が望ましい。

表１　データ (x_{ij}) 表

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	14	2
A_2	15	20	10

$i = 1, 2, \cdots\cdots, a(a = 2)$
$j = 1, 2, \cdots\cdots, b(b = 3)$

(1) 分散分析

手順０　全平均 $\overline{T} = \boxed{} / \boxed{} = \boxed{}$ を計算する。

手順１　集計表 $x_{ij} - \overline{T}$ および二乗表を作る。

表２　集計表 $(x_{ij} - \overline{T})$ 表

	B_1	B_2	B_3	和 $(T_{Ai} - b\overline{T})$	平均 $(\overline{A}_i - \overline{T})$
A_1					
A_2					
和 $(T_{Bj} - a\overline{T})$					
平均 $(\overline{B}_j - \overline{T})$					

表３　$(x_{ij} - \overline{T})^2$ 表

	B_1	B_2	B_3	計
A_1				
A_2				
計	− − − − − − − −			

手順２　平方和を計算する。

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \overline{T})^2 = \boxed{}$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{A}_i - \overline{T})^2 = b\sum_{i=1}^{a}(\overline{A}_i - \overline{T})^2 = \boxed{} = \boxed{}$$

$$S_B = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{B}_j - \overline{T})^2 = a\sum_{j=1}^{b}(\overline{B}_j - \overline{T})^2 = \boxed{} = \boxed{}$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B = \boxed{} - \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

番　号					氏　名	

手順３　分散分析表を作成する。

表４　分散分析表

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A					
B					
E					
計					

検定の結果、
主効果 A は有意水準 5% で有意で { ある，　ない }。
主効果 B は有意水準 5% で有意で { ある，　ない }。

(2) 分散分析後の推定

濃度が最も大きくなる条件は，表２より A は第 $\boxed{\quad\quad}$ 水準、B は第 $\boxed{\quad\quad}$ 水準である。

手順１　点推定を行う。

$$\widehat{\mu}(A_iB_j) = \overline{A}_i + \overline{B}_j - \overline{T} = \frac{T_{Ai}}{b} + \frac{T_{Bj}}{a} - \frac{T}{ab}$$

$$= \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} + \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} - \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} = \boxed{\quad\quad}$$

手順２　信頼率 95% の信頼限界を求める。

$$\frac{1}{n_e} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} = \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} + \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} - \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}} = \frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}$$ （伊奈の式）

$$\widehat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\phi_E, \alpha/2)\sqrt{\frac{V_E}{n_e}} = \boxed{\quad\quad} \pm t(\boxed{\quad\quad}, \boxed{\quad\quad})\sqrt{\frac{\boxed{\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}}$$

$$= \boxed{\quad\quad} \pm \boxed{\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad}$$

$$= \boxed{\quad\quad} \pm \boxed{\quad\quad}$$　信頼下限：$\boxed{\quad\quad}$　信頼上限：$\boxed{\quad\quad}$

（ご意見、ご感想、質問等がございましたらご自由にお書き下さい。）

（演習問題 9c）「二元配置分散分析（繰り返しあり）」

I 化学 (株) では、新たに開発している反応生成物の濃度を高めるため、因子として触媒の種類 A（３水準)、反応温度 B（４水準）を取り上げ、繰り返し２回、計２４回の実験をランダムな順序で行ない、濃度を測定した。得られた結果を表１に示す。なお、データは数値変換済であるが、値は大きい方が望ましい。

表１　データ (x_{ijk}) 表

	$B_1(200^oC)$	$B_2(220^oC)$	$B_3(240^oC)$	$B_4(260^oC)$
A_1	1	2	4	0
	4	4	7	3
A_2	8	9	9	7
	5	5	10	5
A_3	9	10	13	7
	10	12	11	10

$i = 1, 2, \cdots\cdots, a(a = 3)$
$j = 1, 2, \cdots\cdots, b(b = 4)$
$k = 1, 2, \cdots\cdots, n(n = 2)$

(1) 分散分析を行い、要因効果の有無を検定せよ。

手順１　データの構造式：$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

手順２　データの集計表および AB 二元表（T_{AiBj} 表）を作る。

表２　データの集計表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計 T_{Ai}	平均 $\overline{A}_i$
A_1	1	2	4	0		
	4	4	7	3	25	3.1
A_2	8	9	9	7		
	5	5	10	5	58	7.3
A_3	9	10	13	7		
	10	12	11	10	82	10.3
計 T_{Bj}	$\boxed{}$	42	54	32	総合計　$T = 165$	
平均 $\overline{B}_j$	$\boxed{}$	7.0	9.0	5.3	総平均　$\overline{T} = 6.9$	

表３　データの２乗集計表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	1	4	16	0	21
	16	16	49	9	90
A_2	64	81	81	49	275
	25	25	100	25	175
A_3	81	100	169	49	399
	100	144	121	100	465
計	287	370	536	232	1425

表４　AB 二元表（T_{AiBj} 表）

	B_1	B_2	B_3	B_4	計 T_{Ai}	T_{Ai}^2
A_1	5	6	11	3	25	$\boxed{}$
A_2	13	14	19	12	58	$\boxed{}$
A_3	19	22	24	17	82	$\boxed{}$
計 T_{Bj}	$\boxed{}$	42	54	32	165	$\boxed{}$

表５　T_{AiBj}^2 表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	25	36	121	9	191
A_2	169	196	361	144	870
A_3	361	484	576	289	1710
計	555	716	1058	442	2771

手順３　平方和を計算する。

$$CT = \frac{T^2}{abn} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1134.4$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - CT = \boxed{} - 1134.4 = \boxed{}$$

$$S_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} T_{AiBj}^2}{n} - CT = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} - 1134.4 = \boxed{}$$

$$S_A = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{Ai}^2}{bn} - CT = \frac{\boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} - 1134.4 = \boxed{}$$

$$S_B = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{b} T_{Bj}^2}{an} - CT = \frac{7073}{3 \times 2} - 1134.4 = 44.4$$

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B = \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

$$S_E = S_T - S_{AB} = \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

手順４　自由度を計算する。

$$\phi_T = abn - 1 = \boxed{\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad} - 1 = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_{AB} = ab - 1 = \boxed{\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad} - 1 = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_A = a - 1 = \boxed{\quad\quad} - 1 = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_B = b - 1 = \boxed{\quad\quad} - 1 = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_{A\times B} = \phi_{AB} - \phi_A - \phi_B = \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_E = \phi_T - \phi_{AB} = \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

手順５　分散分析表を作成する。

表６　分散分析表 (1)

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A					
B					
$A\times B$					
E					
計					

検定の結果、交互作用 $A\times B$ は有意水準 5% で有意で { ある，　ない } し、F_0 値も小さいので誤差項にプーリング { する，　しない }。

そこで、分散分析表 (2) を作る。

$$S_{E'} = S_E + S_{A\times B} = \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

$$\phi_{E'} = \phi_E + \phi_{A\times B} = \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

表７　分散分析表 (2)

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A					
B					
E'					
計					

検定の結果、
主効果 A は有意水準 5% で有意で { ある，　ない }。
主効果 B は有意水準 5% で有意で { ある，　ない }。

番　号					氏　名	

(2) 分散分析を行った結果に基づいて、濃度の大きい条件で母平均を点推定し、信頼率 95% で区間推定せよ。

まず、データの構造式は

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ijk}$$

と考えられる。

分散分析の結果より、交互作用 $A \times B$ を { 無視して， 無視しないで } 最適水準を設定し母平均を推定する。

濃度が最も大きくなる条件は，表 2 より A は第 $\boxed{}$ 水準、B は第 $\boxed{}$ 水準である。

手順 1　点推定を行う。

$$\widehat{\mu}_{ij} = \overline{A}_i + \overline{B}_j - \overline{T} = \frac{T_{A_i}}{bn} + \frac{T_{B_j}}{an} - \frac{T}{abn}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} - \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

手順 2　信頼率 95% の信頼限界を求める。

$$\frac{1}{n_e} = \frac{1}{bn} + \frac{1}{an} - \frac{1}{abn} = \frac{a+b-1}{abn} = \frac{\boxed{} + \boxed{} - 1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}}$$

$$n_e = \boxed{}$$

$$\widehat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\phi_{E'}, \alpha/2)\sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}} = \boxed{} \pm t(\boxed{}, \boxed{})\sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}$$

$$= \boxed{} \pm \boxed{} \times \boxed{}$$

$$= \boxed{} \pm \boxed{}$$

$$= (\boxed{}, \boxed{})$$

（演習問題 9b）（解答例）「二元配置分散分析（繰り返しなし）」

ある特性値に対して、２つの母数因子 A（２水準）、B（３水準）を取り上げ、計６回の実験をランダムな順序で行ない、濃度を測定した。得られた結果を表１に示す。なお、データの単位は省略してあるが、値は大きい方が望ましい。

表１　データ (x_{ij}) 表

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	14	2
A_2	15	20	10

$i = 1, 2, \cdots\cdots, a(a = 2)$
$j = 1, 2, \cdots\cdots, b(b = 3)$

(1) 分散分析

手順０　全平均 $\overline{T} = 66/6 = 11$ を計算する。

手順１　集計表 $x_{ij} - \overline{T}$ および二乗表を作る。

表２　集計表 $(x_{ij} - \overline{T})$ 表

	B_1	B_2	B_3	和 $(T_{Ai} - b\overline{T})$	平均 $(\overline{A}_i - \overline{T})$
A_1	-6	3	-9	-12	-4
A_2	4	9	-1	12	4
和 $(T_{Bj} - a\overline{T})$	-2	12	-10	0	0
平均 $(\overline{B}_j - \overline{T})$	-1	6	-5	0	

表３　$(x_{ij} - \overline{T})^2$表

	B_1	B_2	B_3	計
A_1	36	9	81	126
A_2	16	81	1	98
計	$-------$			224

手順２　平方和を計算する。

$$S_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij} - \overline{T})^2 = 224$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(\overline{A}_i - \overline{T})^2 = 3 \times \left\{(-4)^2 + (4)^2\right\} = 3 \times (16 + 16) = 96$$

$$S_B = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(\overline{B}_j - \overline{T})^2 = 2 \times \left\{(-1)^2 + (6)^2 + (-5)^2\right\} = 2 \times (1 + 36 + 25) = 124$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B = 224 - 96 - 124 = 4$$

手順３　分散分析表を作成する。

表４　分散分析表

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A	96	1	96.0	48.0*	18.5
B	124	2	62.0	31.0*	19.0
E	4	2	2.00		
計	224	5			

検定の結果、
主効果 A は有意水準 5% で有意で ある。
主効果 B は有意水準 5% で有意で ある。

(2) 分散分析後の推定
濃度が最も大きくなる条件は，表２より A は第 2 水準、B は第 2 水準である。
手順１　点推定を行う。

$$\widehat{\mu}(A_2B_2) = \overline{A}_2 + \overline{B}_2 - \overline{T} = \frac{T_{A2}}{b} + \frac{T_{B2}}{a} - \frac{T}{ab}$$
$$= \frac{45}{3} + \frac{34}{2} - \frac{66}{6} = 21.0$$

手順２　信頼率 95% の信頼限界を求める。

$$\frac{1}{n_e} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{（伊奈の式）}$$
$$\widehat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\phi_E, \alpha/2)\sqrt{\frac{V_E}{n_e}} = 21.0 \pm t(2, 0.025)\sqrt{\frac{2 \times 2.00}{3}}$$
$$= 21.0 \pm 4.303 \times 1.155$$
$$= 21.0 \pm 5.0 \qquad \text{信頼下限：}16.0 \qquad \text{信頼上限：}26.0$$

創造応用 IS（稲葉） No.k9c

2021.11.24(水 13:10 ～)

兵庫高校

（演習問題 9c）「二元配置分散分析（繰り返しあり）」（解答例）

I 化学 (株) では、新たに開発している反応生成物の濃度を高めるため、因子として触媒の種類 A（３水準)、反応温度 B（４水準）を取り上げ、繰り返し２回、計２４回の実験をランダムな順序で行ない、濃度を測定した。得られた結果を表 1 に示す。なお、データは数値変換済であるが、値は大きい方が望ましい。

表 1　データ (x_{ijk}) 表

	$B_1(200^oC)$	$B_2(220^oC)$	$B_3(240^oC)$	$B_4(260^oC)$
A_1	1	2	4	0
	4	4	7	3
A_2	8	9	9	7
	5	5	10	5
A_3	9	10	13	7
	10	12	11	10

$i = 1, 2, \cdots\cdots, a(a = 3)$
$j = 1, 2, \cdots\cdots, b(b = 4)$
$k = 1, 2, \cdots\cdots, n(n = 2)$

(1) 分散分析を行い、要因効果の有無を検定せよ。

手順 1　データの構造式：$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

手順 2　データの集計表および AB 二元表（T_{AiBj} 表）を作る。

表 2　データの集計表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計 T_{Ai}	平均 $\overline{A}_i$
A_1	1	2	4	0		
	4	4	7	3	25	3.1
A_2	8	9	9	7		
	5	5	10	5	58	7.3
A_3	9	10	13	7		
	10	12	11	10	82	10.3
計 T_{Bj}	$\boxed{37}$	42	54	32	総合計 $T = 165$	
平均 $\overline{B}_j$	$\boxed{6.2}$	7.0	9.0	5.3	総平均 $\overline{T} = 6.9$	

表３　データの２乗集計表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	1	4	16	0	21
	16	16	49	9	90
A_2	64	81	81	49	275
	25	25	100	25	175
A_3	81	100	169	49	399
	100	144	121	100	465
計	287	370	536	232	1425

表４　AB 二元表（T_{AiBj} 表）

	B_1	B_2	B_3	B_4	計 T_{Ai}	T_{Ai}^2
A_1	5	6	11	3	25	$\boxed{625}$
A_2	13	14	19	12	58	$\boxed{3364}$
A_3	19	22	24	17	82	$\boxed{6724}$
計 T_{Bj}	$\boxed{37}$	42	54	32	165	$\boxed{10713}$

表５　T_{AiBj}^2 表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	25	36	121	9	191
A_2	169	196	361	144	870
A_3	361	484	576	289	1710
計	555	716	1058	442	2771

手順３　平方和を計算する。

$$CT = \frac{T^2}{abn} = \frac{165^2}{3\times 4\times 2} = 1134.4$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - CT = \boxed{1425} - 1134.4 = \boxed{290.6}$$

$$S_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} T_{AiBj}^2}{n} - CT = \frac{\boxed{2771}}{\boxed{2}} - 1134.4 = \boxed{251.1}$$

$$S_A = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{Ai}^2}{bn} - CT = \frac{\boxed{10713}}{\boxed{4}\times\boxed{2}} - 1134.4 = \boxed{204.7}$$

$$S_B = \frac{\sum_{j=1}^{b} T_{Bj}^2}{an} - CT = \frac{7073}{3 \times 2} - 1134.4 = 44.4$$

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B = \boxed{251.1} - \boxed{204.7} - \boxed{44.4} = \boxed{2.0}$$

$$S_E = S_T - S_{AB} = \boxed{290.6} - \boxed{251.1} = \boxed{39.5}$$

手順４　自由度を計算する。

$$\phi_T = abn - 1 = \boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{2} - 1 = \boxed{23}$$

$$\phi_{AB} = ab - 1 = \boxed{3} \times \boxed{4} - 1 = \boxed{11}$$

$$\phi_A = a - 1 = \boxed{3} - 1 = \boxed{2}$$

$$\phi_B = b - 1 = \boxed{4} - 1 = \boxed{3}$$

$$\phi_{A\times B} = \phi_{AB} - \phi_A - \phi_B = \boxed{11} - \boxed{2} - \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$= \phi_A \times \phi_B = \boxed{2} \times \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$\phi_E = \phi_T - \phi_{AB} = \boxed{23} - \boxed{11} = \boxed{12}$$

手順５　分散分析表を作成する。

表６　分散分析表 (1)

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A	204.7	2	102.4	31.1*	3.89
B	44.4	3	14.8	4.50*	3.49
$A \times B$	2.0	6	0.333	0.10	3.00
E	39.5	12	3.292		
計	290.6	23			

検定の結果、
交互作用 $A \times B$ は有意水準 5% で有意で ない し、F_0 値も小さいので誤差項にプーリング する。

そこで、分散分析表 (2) を作る。

$$S_{E'} = S_E + S_{A\times B} = \boxed{39.5} + \boxed{2.0} = \boxed{41.5}$$

$$\phi_{E'} = \phi_E + \phi_{A\times B} = \boxed{12} + \boxed{6} = \boxed{18}$$

表 7　分散分析表 (2)

要因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
A	$\boxed{204.7}$	$\boxed{2}$	$\boxed{102.4}$	$\boxed{44.4^*}$	$\boxed{3.55}$
B	$\boxed{44.4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{14.8}$	$\boxed{6.42^*}$	$\boxed{3.16}$
E'	$\boxed{41.5}$	$\boxed{18}$	$\boxed{2.306}$		
計	$\boxed{290.6}$	$\boxed{23}$			

検定の結果、
主効果 A は有意水準 5% で有意で <u>ある</u>。
主効果 B は有意水準 5% で有意で <u>ある</u>。

(2) 分散分析を行った結果に基づいて、濃度の大きい条件で母平均を点推定し、信頼率 95% で区間推定せよ。

まず、データの構造式は

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ijk}$$

と考えられる。

分散分析の結果より、交互作用 $A \times B$ を <u>無視して</u> 最適水準を設定し母平均を推定する。

濃度が最も大きくなる条件は，表 2 より A は第 $\boxed{3}$ 水準、B は第 $\boxed{3}$ 水準である。

手順 1　点推定を行う。

$$\widehat{\mu}(A_3B_3) = \overline{A}_3 + \overline{B}_3 - \overline{T} = \frac{T_{A_3}}{bn} + \frac{T_{B_3}}{an} - \frac{T}{abn}$$

$$= \frac{\boxed{82}}{\boxed{8}} + \frac{\boxed{54}}{\boxed{6}} - \frac{\boxed{165}}{\boxed{24}} = 10.3 + 9.0 - 6.9 = \boxed{12.4}$$

手順 2　信頼率 95% の信頼限界を求める。

$$\frac{1}{n_e} = \frac{1}{bn} + \frac{1}{an} - \frac{1}{abn} = \frac{a+b-1}{abn} = \frac{\boxed{3} + \boxed{4} - 1}{\boxed{24}} = \frac{1}{\boxed{4}}$$

$$n_e = \boxed{4}$$

$$\widehat{\mu}_{ij} \pm t(\phi_{E'}, \alpha/2)\sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}} = \boxed{12.4} \pm t(\boxed{18}, \boxed{0.025})\sqrt{\frac{\boxed{2.306}}{\boxed{4}}}$$

$$= \boxed{12.4} \pm \boxed{2.101} \times \boxed{0.759}$$

$$= \boxed{12.4} \pm \boxed{1.6}$$

$$= (\boxed{10.8}, \boxed{14.0})$$