2022.01.07(金２)

ZOOM

定理３：BG 保留である単純仮説は、SP-MCP 保留である。

証明：1) 単純仮説 $H_{\boldsymbol{P}} = H_P$ が BG 保留とする。

まず始めに、H_P 自身が、極大 BG 保留であるとする。

すると、補題３より、H_P は、SP-MCP 保留となる。

次に、H_P が極大 BG 保留ではないとすると、ある単純仮説 $\boldsymbol{Q} = (Q_1)$ があって、$H_{\boldsymbol{Q}}$ が極大 BG 保留であるように選べる。

補題３より、$H_{\boldsymbol{Q}} = H_{(Q_1)}$ は、SP-MCP 保留と分かる。

ここで、SP-MCP 法のコヒーレンス性より、$H_{\boldsymbol{Q}}$ から誘導される H_P も SP-MCP 保留であると分かる。

2) $s \geq 2$ のとき、任意の i で、H_{Q_i} が BG 保留となる。

このとき、H_Q が H_P を誘導するから、$\exists i_0$ があって、$Q_{i_0} \supset P$ となる。

この $Q_{i_0} = Q^*$ と略記する。もし、$Q^* = P$ であれば、$H_P = H_{Q^*}$ は、BG 保留となる。

$Q^* \neq P$ のときは、H_{Q^*} は BG 保留でかつ、H_P を誘導する。したがって、BG 法のコヒーレンス性より、H_P も BG 保留だと分かる。 証明終

これらの定理の内容をまとめると、以下の 3 項目となる。

１）すべての仮説に対しては、BG アルゴリズムで棄却される仮説は、必ず S-Peritz 法でも棄却される。

２）単純仮説に対して、BG アルゴリズムで保留なら、S-Peritz 法でも保留となる。

３）また、S-Peritz 法で棄却されて BG アルゴリズムで保留されるような例が 4 群で存在する。

反例：$k = 4$ 群で、自由度 ∞ の場合、$\alpha = 0.05,\ \sigma^2 * (2/n) = 1$ のときを考える。

NK での有意水準の配分 $\alpha_p^{NK} = \alpha,\ p = 2, 3, 4$ における棄却限界値は、$c_2^{NK} = 2.772,\ c_3^{NK} = 3.314,\ c_4^{NK} = 3.633$ である。

$Ryan$ での有意水準の配分 $\alpha_p^R = 1-(1-\alpha)^{p/k},\ p = 2, 3, 4$ における棄却限界値は、$c_2^R = 3.163,\ c_3^R = 3.468,\ c_4^R = 3.633$ である。

４つの群の母平均が、$\overline{X}_1 = -2, \overline{X}_2 = -1.2,\ \overline{X}_3 = 1.2,\ \overline{X}_4 = 2$ とすると、複合仮説 $H_{(1,3),(2,4)}$ は、BG では保留であるが、$SP - MCP$ では棄却される。

詳細な解説：

BG 法では、まず、$\{1234\}$ は $4 > 3.633$ より、Ryan 検定棄却より、BG 棄却。

$\{124\}$, $\{134\}$ は、$4 > 3.468$ より、Ryan 検定棄却より、BG 棄却。

$\{123\}$, $\{234\}$ は、$3.2 < 3.314$ より、NK 検定保留より、BG 保留。

$\{12\}$,$\{23\}$,$\{34\}$ は、0.8, $2.4 < 2.772$ より、NK 検定保留より、BG 保留。

$\{14\}$ は、$4 > 3.163$ より、Ryan 棄却より、BG 棄却。

ここで、$\{13\}$,$\{24\}$ は、$3.2 > 3.163$ より、Ryan 検定棄却である。（BG 検定の意味では、棄却？）ただし、誘導関係より、$\{123\}$,$\{234\}$ が BG 保留より、$\{13\}$,$\{24\}$ は、BG 保留。

BG 法における複合仮説に対する判定は、単純仮説に対する判定から導かれる。即ち、$\{12\}\{34\}$ は、BG 保留と BG 保留より、BG 保留。**$\{13\}\{24\}$ は、BG 保留**。$\{14\}\{23\}$ は BG 棄却と BG 保留より、BG 棄却。

SP 法では、まず、$\{1234\}$ は $4 > 3.633$ より、NK 検定棄却より、SP-MCP 棄却。

$\{124\}$, $\{134\}$ は、$4 > 3.314$ より、NK 検定棄却より、SP-MCP 棄却。

$\{123\}$, $\{234\}$ は、$3.2 < 3.314$ より、NK 検定保留より、SP-MCP 保留。

SP 法における複合仮説に対する判定は、単純仮説に対する判定からではなく、Ryan 検定の結果で定義される。即ち、

$\{12\}\{34\}$ は、$0.8 < 3.163$ より、Ryan 検定保留ゆえ、SP 検定保留。つまり、SP-MCP 保留。

$\{13\}\{24\}$ は、$3.2 > 3.163$ より、Ryan 検定棄却ゆえ、SP 検定棄却。つまり、**SP-MCP 棄却**。

$\{14\}\{23\}$ は、$4 > 3.163$ より、1 つは Ryan 検定棄却ゆえ、SP 検定棄却。つまり、SP-MCP 棄却。

誘導関係より、$\{123\}$,$\{234\}$ が SP-MCP 保留より、$\{12\}$,$\{13\}$,$\{23\}$,$\{23\}$,$\{24\}$,$\{34\}$ は、SP-MCP 保留。

$\{14\}$ は、$4 > 2.772$ より、NK 検定棄却。誘導される仮説で SP-MCP 保留はないため、SP-MCP 棄却。

Remark：反例は、複合仮説しか作れない。

定理４：自然なアルゴリズム（N-Peritz 法）は、BG アルゴリズムよりも検出力が高い。

証明：一般的に、その定義の仕方から、NP 法は SP 法に比べて検出力は高い。また、定理 2 より、任意の仮説に関して、BG 法は、SP 法に比べて保留が多い。つまり、BG 法より、SP 法の検出力が 高い。したがって、BG 法より NP 法の検出力は必ず高くなる。証明終

したがって、この自然なアルゴリズムである NP 法は、現在、広く使われている BG アルゴリズムよりも検出力が高い、より望ましいアルゴリズムであると言える。

補足：N-Peritz 法と、S-Peritz 法の棄却限界値が異なる最小の群の数は 5 群であり、パターン $(2,2)$ に対する判定が異なる。

Conclution

この論文で与えられた、N-Peritz 法は、実用上も十分利用可能であり、現在、ペリの方法として知られている BG アルゴリズムより、必ず検出力が向上するという意味で、より優れた方法である。

現在、ペリの方法とは、Tukey-Welsch の方法に、Newman-Keuls の方法を組み合わせて作られているといわれている。しかし、より自然な発想として閉検定手順そのものから作られていると考える方が良いと思われる。