問題 1

1. $R_0 : Y$ と $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)'$ の重相関係数
   $R_0^* : Y$ と $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_q)'$ の重相関係数 $(q < p)$

$\Longrightarrow$

$$R_0 \geqq R_0^*$$

[注意] Prop.1.1.3 を見れば明らかであるが、式の上で計算せよ。

2. 定数項がある場合に、次のことを証明せよ。

(i) $X^* = [\mathbf{1_n} | X] \quad n \times (p+1)$

とおくとき

$$\text{rank } X^* = p + 1 \iff S : \text{正値}$$

(ii) Prop.1.2.1 の解と、Prop.1.2.4 の解は一致する。

ヒント：$\text{rank } X^* = \text{rank}(X^{*\prime} X^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{1_n}' \\ X' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1_n} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1_n}'\mathbf{1_n} & \mathbf{1_n}' X \\ X' \mathbf{1_n} & X' X \end{bmatrix}$

3. $p = 2$ のとき、平均の意味で標準化された X は、分散の意味での標準化において、条件数が増加しないことを示せ。即ち、

$X = (x_{ij})$ において、 $\sum_i x_{ij} = 0 \ (\forall j = 1, 2)$ とする。

$$d_j = \sum_i x_{ij}^2 \quad (\forall j)$$

$$D = diag(d_1, \cdots, d_p)$$

$$X^* = X D^{-\frac{1}{2}}$$

とするとき、

$$\text{cond}(\text{X}^*) \leqq \text{cond}(\text{X}).$$

4. $\boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{Y}$ はそれぞれ $p \times 1, \ q \times 1$ のランダムベクトル、

$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}), \ \boldsymbol{\nu} = E(\boldsymbol{Y}), \ \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \text{Var} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$ とする。

$E||\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{a} - B\boldsymbol{X}||^2$ を最小にする定数ベクトル $\boldsymbol{a}(q \times 1)$ と行列 $B(q \times p)$ を定めよ。
（このとき、$\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{X}$ を、$\boldsymbol{Y}$ の $\boldsymbol{X}$ の上への回帰という。）

5. データ $\boldsymbol{y}(n \times 1)$, $X(n \times p)$ に関する（線形）回帰において、最小二乗解を $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, 残差を $\boldsymbol{e}$ とする。

$$W = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{y} & X \end{array} \right]' \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{y} & X \end{array} \right]$$

とし、

$$W^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} W^{11} & W^{12} \\ W^{21} & W^{22} \end{array} \right] & \begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad 1 & \quad\quad p \end{array} & \end{array}$$

と書くとき、以下の 3 つの式を証明せよ。

$$W^{11} = \frac{1}{||\boldsymbol{e}||^2}, \quad W^{21} = -\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}{||\boldsymbol{e}||^2}, \quad W^{22} = (X'X)^{-1} + \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'}{||\boldsymbol{e}||^2}$$

6. 略

7. 略