統計推測特論（稲葉） No.C13

2021.10.05(火２)

ZOOM

問題 C

1. (X_1, X_2) の p.d.f. $f(x_1, x_2) = 2\phi(x_1)\phi(x_2)I(x_1 x_2), \quad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$

ただし、

$$I(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

(1) $X_1 \sim N(0,1)$

$X_2 \sim N(0,1)$

(2) (X_1, X_2) の分布は２次元正規分布ではない。

2. 次の条件をみたす２次元確率変数 (X_1, X_2) の例を作れ。

(1) $X_1 \sim N(0,1)$

$X_2 \sim N(0,1)$

(2) X_1 と X_2 は無相関

(3) X_1 と X_2 は独立ではない。

3. $$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \boldsymbol{\mu} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mu_1} \\ \boldsymbol{\mu_2} \end{array}\right] \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array}, \quad \Sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \end{array}$$

Σ：正則

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{x_2}$ が与えられたときの $\boldsymbol{X_1}$ の条件付分布は

$\boldsymbol{X_1} | \boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{x_2} \sim N_q(\boldsymbol{\mu_1} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{\mu_2}),\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$

4. $X \sim \chi_n^2$

$\Longrightarrow$

(1) $E(X) = n, \quad var(X) = 2n$

(2) $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{n-2}$

5. p.d.f. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^\lambda \Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{\sigma}}, & x \geqq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$(\sigma > 0, \lambda > 0)$ を持つ分布をガンマ分布と呼び、記号 $\Gamma(\sigma, \lambda)$ で表す。

p.d.f. $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$(\alpha > 0, \beta > 0)$ を持つ分布をベータ分布と呼び、記号 $Be(\alpha, \beta)$ で表す。

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \\ X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda_i),\ (i = 1, 2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (X_1 + X_2) \perp\!\!\!\perp \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \\ (X_1 + X_2) \sim \Gamma(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \sim Be(\lambda_1, \lambda_2) \end{array}\right.$$

6. $X = (x_{ij}) : n \times p$
$\{x_{ij}\}$ i.i.d. $N(0,1)$
$G \in O(n), \quad H \in O(p)$
$Z = (z_{\alpha\beta}) = G'XH$
$\Longrightarrow$
$$\{z_{\alpha\beta}\} \quad \text{i.i.d.} \quad N(0,1)$$

7. $\boldsymbol{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$
$r = \texttt{rank}(\Sigma)$
Σ^- : Σ の 1 つの一般逆行列
$\Longrightarrow$
$$\boldsymbol{X}'\Sigma^-\boldsymbol{X} \sim \chi^2_r$$